قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

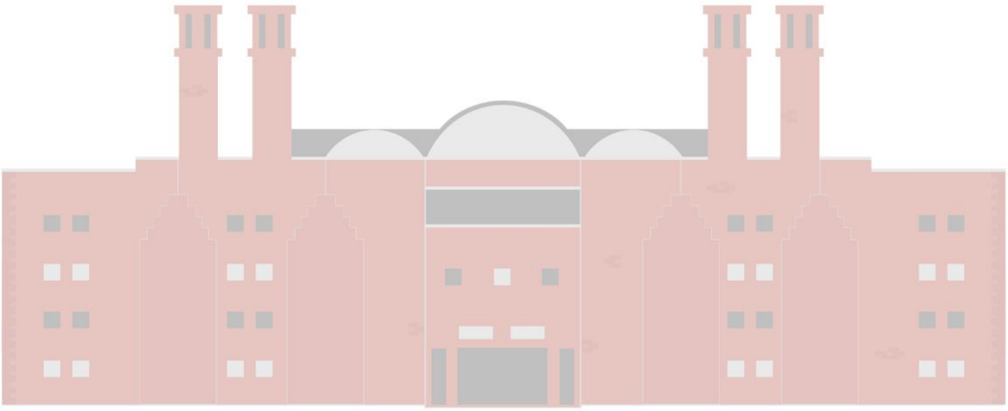
السنة الثانية / الفصل الأول

RED BUILDING TEAM

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة العشرون

5 صفحات



الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 2014/11/13

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

التوابع الخاصة :

1) التابع غاما $Gamma\ f$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\ t^{z-1}\ dt \quad : \quad Re(z) > 0$$

صيغة غاوس $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^3}{z(z+1)\ldots\ldots(z+n)} \ : n \in N$

صيغة فايرشتراوس $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$

ثابت لوير $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = 0.577 \ldots$

خواص التابع غاما :

1) $\Gamma(z)$ تحليلي في $Re(z) > 0$

2) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

البرهان :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}\ t^{z}\ dt$$

$$u = t^z \ \Rightarrow du = zt^{z-1}\ dt$$

$$e^{-t}\ dt = dv \ \Rightarrow \ v = \ -e^{-t}$$

$$-[t^z\ e^{-t}]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\ dt$$

$$-[t^z\, e^{-t}]_0^\infty = -\lim_{t\to\infty} t^z\ e^{-t} + 0$$

$$= -\lim_{t\to\infty}\frac{t^z}{e^t} = 0$$

e^t تسعى إلى اللانهاية أسرع من أي تابع آخر

$$\Rightarrow \Gamma(z+1) = z\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\ dt \ = z\ \Gamma(z)$$

3) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

بعض القيم الشهيرة للتابع غاما :

a) $z = n \in \mathbb{N}$ نعوض في القانون رقم (2)

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)$$
$$= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = n(n-1)\dots\dots 1.\Gamma(1)$$
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\ dt\ = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!}\ ,,\quad \boldsymbol{\Gamma(z+1) = z!}$$

(b $z = \frac{1}{2}$ نعوض في القانون (3)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$$
$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \ \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

(c $z = n - \frac{1}{2}$ (مضاعفات الـ $\frac{1}{2}$) نعوض في القانون (2)

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma(n-2)$$
$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\dots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{2n-1}{2}\,\frac{2n-3}{2}\dots\dots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)(2n-1)(2n-3)\dots 3.1$$
$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

(d $z = \frac{1}{2} - n$ (مضاعفات الـ $-\frac{1}{2}$) نعوض في القانون (3)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\pi(\frac{1}{2}-n)} = \pi(-1)^n$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{\pi(-1)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{2^n(-1)^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}$$

e) $z = 0$ نستخدم القانون (2)

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} \infty$$

f) $z = -n \; : n \in N$ نعوض في القانون (2)

$$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(1-n)}{-n} = \frac{\Gamma(2-n)}{-n(1-n)} = \frac{\Gamma(3-n)}{-n(1-n)(2-n)}$$

$$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(0)}{-n(1-n)(2-n)\ldots\ldots\ldots(-1)} \quad *$$

$$\Gamma(-n) = \frac{\infty}{(-1)^n . n!} = (-1) \;\; \infty$$

ملاحظة : في * عندما n عدد زوجي يكون لدينا عدد زوجي من الاشارات السالبة التي تتحول إلى اشارات موجبه .

و عندما يكون n فردي فستبقى الاشارة سالبة

و لذلك قمنا بإخراج الاشارة ووضعناها بدلالة n.

مثال 1: $\boldsymbol{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right), \Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\right)!, \left(-\frac{1}{2}\right)!, \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) = \frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}-3\right) = -\frac{2^3}{5!!}\sqrt{\pi} = \frac{-8}{15}\sqrt{\pi}$$

مثال 2: $\boldsymbol{A = \int_0^1 \sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\, dx}$

الحل :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = t = -\ln(x)$$

$$e^{-t} = x \implies dx = -e^{-t}dt$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$A = -\int_{\infty}^{0} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}} dt = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

مثال 3:

$$\boldsymbol{A = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx}$$

$$x^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-t} . \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2) التابع بيتا β:

$$\beta(a,b) = \int_{0}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx \qquad a,b > 0$$

خواص التابع بيتا :

1) $\beta(a,b) = \beta(b,a)$

2) $\beta(a,b+1) = \frac{b}{a}\beta(a+1,b)$

البرهان :

$$A = \beta(a,b+1) = \int_{0}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b} dx$$

$$\Rightarrow u = (1-x)^b \Rightarrow du = -b(1-x)^{b-1} dx$$

$$dv = x^{(a-1)} dx \Rightarrow v = \frac{x^a}{a}$$

$$A = -\left[\frac{(1-x)^b x^a}{a}\right]_0^1 + \frac{b}{a}\int_{0}^{1} x^a (1-x)^{b-1} dx$$

$$A = \frac{b}{a}\beta(a+1,b)$$

3) $\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

البرهان :

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\left(\int_0^{\infty} e^{-t}.t^{a-1}dt\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-\tau}.\tau^{b-1}d\tau\right)$$

$$t=x^2,\tau=y^2$$

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=\left(2\int_0^{\infty} e^{-x^2}.x^{2a-2}.x.dx\right)\left(2\int_0^{\infty} e^{-y^2}.y^{2b-2}.y.dy\right)$$

$$=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}.x^{2a-1}.y^{2b-1}.dx.dy$$

بالانتقال الى الإحداثيات القطبية :

$$=4\int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}.\rho^{2a-1}.\cos^{2a-1}\varphi.\rho^{2b-1}.\sin^{2b-1}\varphi.\rho.d\rho.d\varphi$$

$$=\underbrace{4\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}.\rho^{2(a+b)-1}.d\rho.}_{I_1}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2a-1}\varphi.\sin^{2b-1}\varphi.d\varphi}_{I_2}$$

$$I_1=4\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}.\rho^{2(a+b)-1}.d\rho.$$

$$\rho^2=X\Longrightarrow 2\rho d\rho=dX$$

$$I_1=2\int_0^{\infty} e^{-X}.X^{a+b-1}.dX=2\Gamma(a+b)$$

$$\Gamma(a)\Gamma(b)=2\Gamma(a+b).I_2$$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2a-1}\varphi.\sin^{2b-1}\varphi.d\varphi=\frac{1}{2}\beta(a,b)\quad ...*$$

سيتم اكمال برهان * في المحاضرة القادمة

rbt
لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي